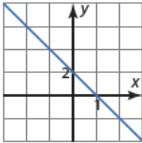


7.1

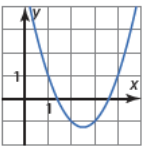
Funktio $f(x) = -2x + 2$

Funktio f on lineaarinen funktio, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on -2 . Funktion f kuvaaja on laskeva suora eli kuva 2.



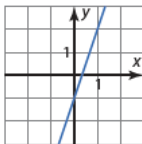
Funktio $g(x) = x^2 - 5x + 5$

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on 1 . Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli eli kuva 4.



Funktio $h(x) = 3x - 1$

Funktio h on lineaarinen funktio, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on 3 . Funktion h kuvaaja on nouseva suora eli kuva 3.

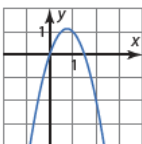


Funktio $i(x) = x(3 - 2x)$

Sievennetään funktion i lauseketta:

$$i(x) = x(3 - 2x) = 3x - 2x^2 = -2x^2 + 3x.$$

Funktio i on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on -2 . Funktion i kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli eli kuva 1.



Vastaus

$f-2, g-4, h-3, i-1$

7.2

- a) Funktio $f(x) = 2x - 2$ ei ole toisen asteen polynomifunktio, vaan lineaarinen funktio.
- b) Funktio $g(x) = 3x^2 - 5x + 4$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on 3. Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- c) Sievennetään funktion h lauseketta:
 $h(x) = x(2 - 2x) = 2x - 2x^2 = -2x^2 + 2x$. Funktio h on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on -2 . Funktion h kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.
- d) Sievennetään funktion i lauseketta: $i(x) = x(x^2 - 4x) = x^3 - 4x^2$
Funktio i ei ole toisen asteen polynomifunktio, vaan kolmannen asteen polynomifunktio.

Vastaus

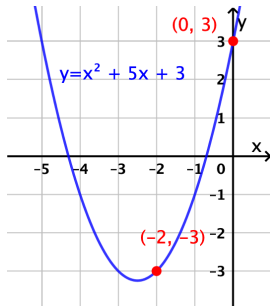
- a) ei
b) kyllä, ylöspäin
c) kyllä, alaspäin
d) ei

7.3

Piirretään funktion $f(x) = x^2 + 5x + 3$ kuvaaja.

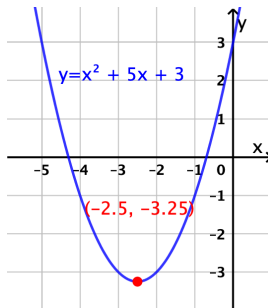
- a) Funktion arvo $f(0)$ saadaan etsimällä kohdassa $x = 0$ oleva kuvaajan piste. Kuvaajan piste on $(0, 3)$, joten $f(0) = 3$.

Funktion arvo $f(-2)$ saadaan etsimällä kohdassa $x = -2$ oleva kuvaajan piste. Kuvaajan piste on $(-2, -3)$, joten $f(-2) = -3$.



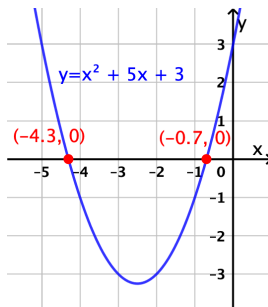
- b) Selvitetään paraabelin huipun koordinaatit geometriaohjelmalla.

Huippu on pisteessä $(-2,5; -3,25)$, joten huipun x -koordinaatti on $-2,5$.



- c) Funktion f nollakohdat löytyvät kuvaajalta niistä kohdista, joissa funktio saa arvon 0, eli kohdista, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin. Selvitetään kuvaajan ja x -akselin leikkauspisteet geometriaohjelmalla.

Kuvaaja leikkaa x -akselin likimain pisteissä $(-4,3; 0)$ ja $(-0,7; 0)$ eli funktion nollakohdat ovat $x \approx -4,3$ ja $x \approx -0,7$.



Vastaus

a) $f(-2) = -3, f(0) = 3$

b) $x = -2,5$

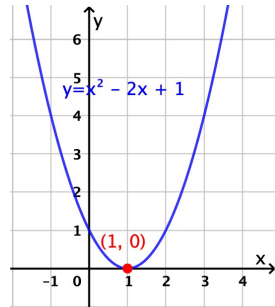
c) $x \approx -4,3$ ja $x \approx -0,7$

7.4

Piirretään funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ kuvaaja.

- a) Selvitetään paraabelin huipun koordinaatit geometriaohjelmalla.

Huippu on pisteessä $(1, 0)$.



- b) Funktiolla f saa arvon 0 ainoastaan kohdassa $x = 1$, joten funktiolla f on yksi nolla kohta.
- c) Funktion f nollakohdat löytyvät kuvaajalta niistä kohdista, joissa funktio saa arvon 0, eli kohdista, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin. Selvitetään kuvaajan ja x -akselin leikkauspisteet geometriaohjelmalla.

Kuvaaja leikkaa x -akselin ainoastaa kohdassa $x = 1$.

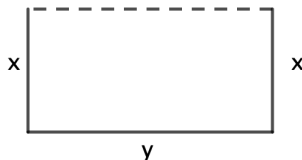
Funktion f nollakohta on $x = 1$

Vastaus

- a) $(1, 0)$
b) yksi
c) $x = 1$

7.5

- a) Aitauksen seinää vasten kohtisuoran sivun pituus on x metriä. Merkitään aitauksen seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitaus tarvitaan kolmelle sivulle ja aitaa on käytettävissä 8 metriä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$2x + y = 8$$

$$y = -2x + 8$$

Ratkaistaan y CAS-laskimella.

Muodostetaan funktio $A(x)$, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot y$$

$$= x(-2x + 8)$$

$$= -2x^2 + 8x$$

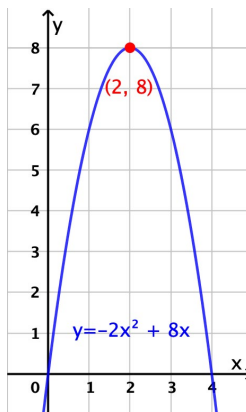
Sijoitetaan $y = -2x + 8$.

Aitauksen pinta-ala $A(x) = -2x^2 + 8x$.

- b) Piirretään funktion $A(x) = -2x^2 + 8x$ kuvaaja. Aitauksen suurin pinta-ala on funktion $A(x)$ suurin arvo, joka löytyy paraabelin huipusta.

Pinta-ala on suurin, kun $x = 2$.

Tällöin aitauksen seinää vasten kohtisuoran sivun pituus $x = 2$ (metriä) ja seinän suuntaisen sivun pituus $y = -2x + 8 = -2 \cdot 2 + 8 = 4$ (metriä).



Vastaus

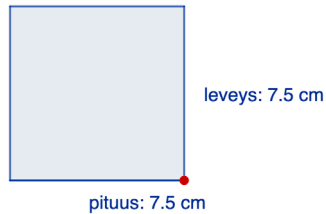
a) $A(x) = -2x^2 + 8x$

- b) seinää vasten kohtisuora sivu 2 m ja seinän suuntainen sivu 4 m

7.6

- a) Tutkitaan suorakulmion mittoja appletilla.

Suorakulmion pituus ja leveys tulisi olla 7,5 cm, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri.



Siirrä punaista pistettä.

Suorakulmion pinta-ala: 56.25 cm²

- b) Suorakulmion leveys on x senttimetriä. Merkitään suorakulmion pituutta kirjaimella y . Suorakulmion piirin pituus on 30 senttimetriä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan suorakulmion pituus y .

$$2x + 2y = 30$$

$$y = -x + 15$$

Muodostetaan funktio $A(x)$, joka ilmaisee suorakulmion pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot y$$

$$= x(-x + 15)$$

$$= -x^2 + 15x$$

Piirretään funktion

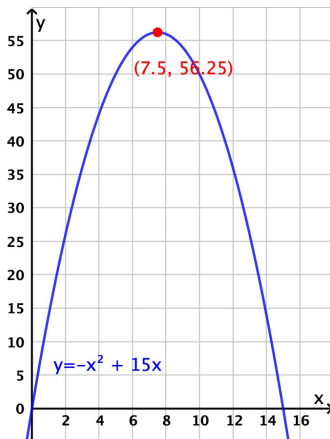
$A(x) = -x^2 + 15x$ kuvaaja.

Suorakulmion suurin pinta-ala on funktion $A(x)$ suurin arvo, joka löytyy paraabelin huipusta.

Pinta-ala on suurin, kun $x = 7,5$.

Tällöin suorakulmion pituus $x = 7,5$ (cm) ja leveys

$y = -x + 15 = -7,5 + 15 = 7,5$ (cm).



Vastaus

a) pituus ja leveys 7,5 cm

b) $A(x) = -x^2 + 15x$, pituus ja leveys 7,5 cm

7.7

a) Funktion $f(x) = x^2 - 3x$ arvo, kun muuttuja $x = -1$ on
 $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$.

b) Funktion $g(x) = -x^2 + 2x$ arvo, kun muuttuja $x = 3$ on
 $g(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -9 + 6 = -3$.

Vastaus

a) $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4$

b) $g(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$

7.8

Taulukoidaan funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$ arvoja.

x	$f(x) = x^2 - 6x + 5$
0	$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$
1	$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$
2	$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$
3	$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$
4	$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$

Toisen asteen funktion kuvaajaparaabeli on symmetrinen paraabelin huipun kautta kulkevan y -akselin suuntaisen suoran suhteen.

Funktio f saa saman arvon -3 kohdissa $x = 2$ ja $x = 4$. Symmetrian vuoksi paraabelin huippu on kohtien $x = 2$ ja $x = 4$ puolivälissä eli kohdassa $x = 3$.

Paraabelin huipun x -koordinaatti on 3.

Vastaus

$x = 3$

7.9

a) Funktio $f(x) = 7 - 2x$

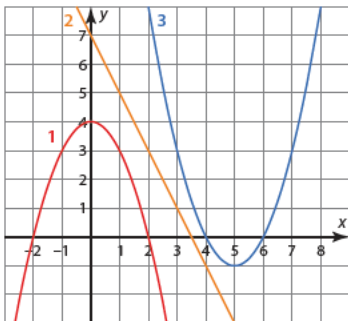
Funktio f on lineaarinen funktio, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on -2 . Funktion f kuvaaja on laskeva suora eli kuvaaja 2.

Funktio $g(x) = 4 - x^2$

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on -1 . Funktion g kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli eli kuvaaja 1.

Funktio $h(x) = x^2 - 10x + 24$

Funktio h on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on 1 . Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli eli kuvaaja 3.



- b)** Funktion nollakohdat löytyvät kuvaajalta niistä kohdista, joissa funktio saa arvon 0, eli kohdista, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin.

Kuvaajan perusteella funktion f nollakohta $x \approx 3,5$, funktion g nollakohdat $x \approx -2$ ja $x \approx 2$ sekä funktion h nollakohdat $x = 4$ ja $x = 6$.

Vastaus

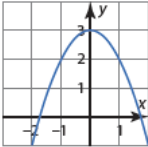
a) $f - 2$, $g - 1$, $h - 3$

b) funktion f nollakohta $x \approx 3,5$, funktion g nollakohdat $x \approx -2$ ja $x \approx 2$, funktion h nollakohdat $x = 4$ ja $x = 6$

7.10

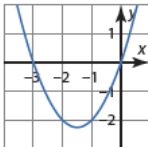
Funktio $f(x) = -x^2 + 3$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on -1 . Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli eli kuva 3.



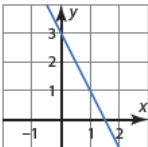
Funktio $g(x) = x^2 + 3x$

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on 1 . Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli eli kuva 1.



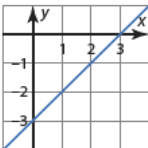
Funktio $h(x) = -2x + 3$

Funktio h on lineaarinen funktio, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on -2 . Funktion h kuvaaja on laskeva suora eli kuva 4.



Funktio $i(x) = x - 3$

Funktio i on lineaarinen funktio, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on 1 . Funktion f kuvaaja on nouseva suora eli kuva 2.



Vastaus

$f-3$, $g-1$, $h-4$, $i-2$

7.11

- a) Funktio $f(x) = 5x^2 + 25$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on 5. Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- b) Funktio $g(x) = -3x + 7$ ei ole toisen asteen polynomifunktio, vaan lineaarinen funktio.
- c) Sievennetään funktion h lauseketta:
 $h(x) = x^2(1 - x) = x^2 - x^3 = -x^3 + x^2$. Funktio h ei ole toisen asteen polynomifunktio, vaan kolmannen asteen polynomifunktio.
- d) Sievennetään funktion i lauseketta:
 $i(x) = x(1 - 3x) = x - 3x^2 = -3x^2 + x$. Funktio i on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on -3 . Funktion h kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Vastaus

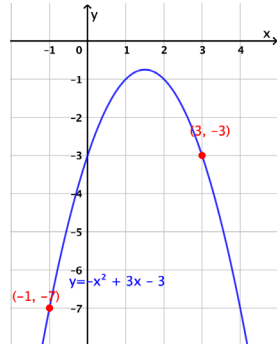
- a) kyllä, ylöspäin
b) ei
c) ei
d) kyllä, alaspäin

7.12

Piirretään funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 3$ kuvaaja.

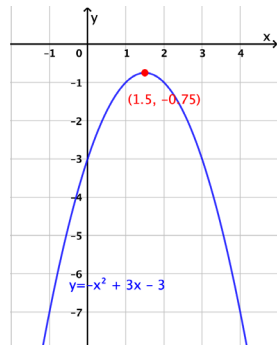
- a) Funktion arvo $f(-1)$ saadaan etsimällä kohdassa $x = -1$ oleva kuvaajan piste. Kuvaajan piste on $(-1, -7)$, joten $f(-1) = -7$.

Funktion arvo $f(3)$ saadaan etsimällä kohdassa $x = 3$ oleva kuvaajan piste. Kuvaajan piste on $(3, -3)$, joten $f(3) = -3$.



- b) Selvitetään paraabelin huipun koordinaatit geometriaohjelmalla.

Huippu on pisteessä $(1,5; -0,75)$, joten huipun x -koordinaatti on $1,5$.



- c) Funktion f nollakohdat löytyvät kuvaajalta niistä kohdista, joissa funktio saa arvon 0 , eli kohdista, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin.

Funktion kuvaaja ei leikkaa x -akselia. Funktiolla ei ole nollakohtia.

Vastaus

- a) $f(-1) = -7, f(3) = -3$
b) $x = 1,5$
c) Nollakohtia ei ole.

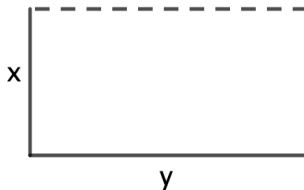
7.13

- a) Alueen on leveys x metriä. Merkitään alueen pituutta kirjaimella y .

Alue rajataan nurkkaan, joten köyttä tarvitaan alueen kahdelle sivulle.

Köyttä on käytettävissä 18 metriä.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .



$$x + y = 18$$

$$y = -x + 18$$

Ratkaistaan y CAS-laskimella.

Muodostetaan funktio $A(x)$, joka ilmaisee alueen pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot y$$

Sijoitetaan $y = -x + 18$.

$$= x(-x + 18)$$

$$= -x^2 + 18x$$

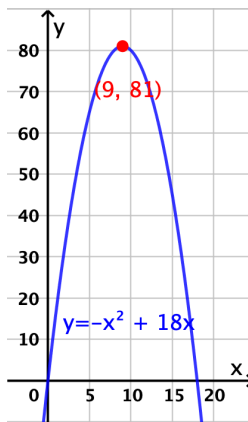
Alueen pinta-ala $A(x) = -x^2 + 18x$.

- b) Piirretään funktion $A(x) = -x^2 + 18x$ kuvaaja. Aitauksen suurin pinta-ala on funktion $A(x)$ suurin arvo, joka löytyy paraabelin huipusta.

Pinta-ala on suurin, kun $x = 9$.

Tällöin alueen leveys $x = 9$ (metriä) ja pituus $y = -x + 18 = -9 + 18 = 9$ (metriä).

- c) Alueen suurin mahdollinen pinta-ala on funktion A suurin arvo
 $A(9) = -9^2 + 18 \cdot 9 = 81 \text{ (m}^2\text{)}.$



Vastaus

a) $A(x) = -x^2 + 18x$

b) pituus ja leveys 9 m

c) 81 m^2

7.14

- a) Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 1$ arvo, kun muuttuja $x = -2$ on
$$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1.$$
- b) Funktion $g(x) = -2x^2 - 3x$ arvo, kun muuttuja $x = 2$ on
$$g(2) = -2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -8 - 6 = -14$$

Vastaus

- a) $f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = -1$
- b) $g(2) = -2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -14$

7.15

Taulukoidaan funktion $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ arvoja.

x	$f(x) = -x^2 - 4x + 2$
0	$f(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$
-1	$f(-1) = -(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 2 = 5$
-2	$f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 6$
-3	$f(-3) = -(-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 2 = 5$

Toisen asteen funktion kuvaajaparaabeli on symmetrinen paraabelin huipun kautta kulkevan y -akselin suuntaisen suoran suhteen.

Funktio f saa saman arvon 5 kohdissa $x = -1$ ja $x = -3$. Symmetrian vuoksi paraabelin huippu on kohtien $x = -1$ ja $x = -3$ puolivälissä eli kohdassa $x = -2$.

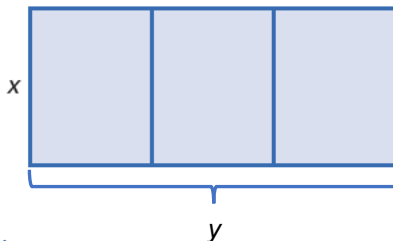
Paraabelin huippu on pisteessä $(-2, 6)$.

Vastaus

$(-2, 6)$

7.16

- a) Alueen on sisäaitojen suuntaisen ulkoreunan pituus on x metriä. Merkitään alueen toisen ulkoreunan pituutta kirjaimella y .



Aitamateriaalia tarvitaan alueen ulkoreunaan sekä kahteen sisäaitaan. Materiaalia on käytettävissä 400 metriä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$4x + 2y = 400$$

$$y = -2x + 200$$

Muodostetaan funktio $A(x)$, joka ilmaisee alueen pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot y$$

$$= x(-2x + 200)$$

$$= -2x^2 + 200x$$

Alueen pinta-ala

$$A(x) = -2x^2 + 200x$$

Ratkaistaan y CAS-laskimella

Sijoitetaan $y = -2x + 200$.

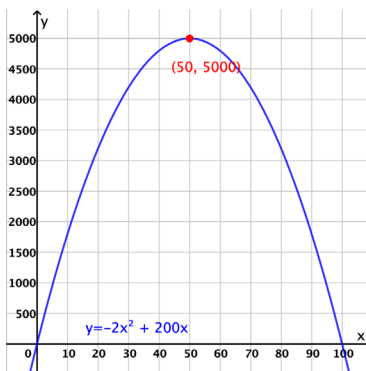
- b) Piirretään funktion

$$A(x) = -2x^2 + 200x$$

kuvaaja.

Alueen suurin pinta-ala on funktion $A(x)$ suurin arvo, joka löytyy paraabelin huipusta.

Pinta-ala on suurin, kun $x = 50$ (m). Tällöin alueen kokonaispinta-ala on $A(50) = 5000 \text{ m}^2$.



Vastaus

a) $A(x) = -2x^2 + 200x$

b) 5000 m^2

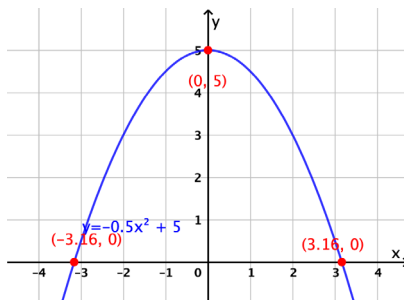
7.17

- a) Piirretään funktion f kuvaaja.

Tunnelin korkeus on funktion f suurin arvo, joka löytyy paraabelin huipusta.

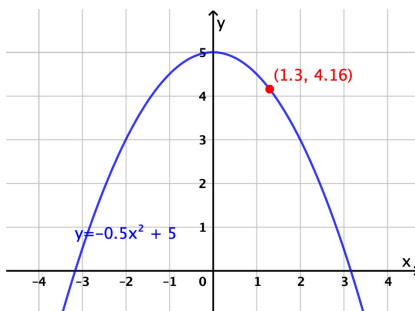
Tunnelin korkeus on 5,0 metriä.

Tunnelin leveys on funktion f nollakohtien välinen etäisyys:
 $3,16 - (-3,16) = 6,32 \approx 6,3$ (m).



- b) Oletetaan, että kuorma-auto voi ajaa tunnelin läpi tien keskilinjaa pitkin. Koska kuorma-auton leveys on 2,60 m se ulottuu 1,30 m keskilinjan kummallekin puolelle.

Selvitetään funktion f kuvaajan avulla kuinka korkea tunneli on 1,30 m keskilinjan oikealla puolella.



Koska 1,30 m keskilinjan oikealla puolella tunnelin korkeus on 4,16 m, mahtuu 4,00 m korkea kuorma-auto ajamaan tunnelin läpi.

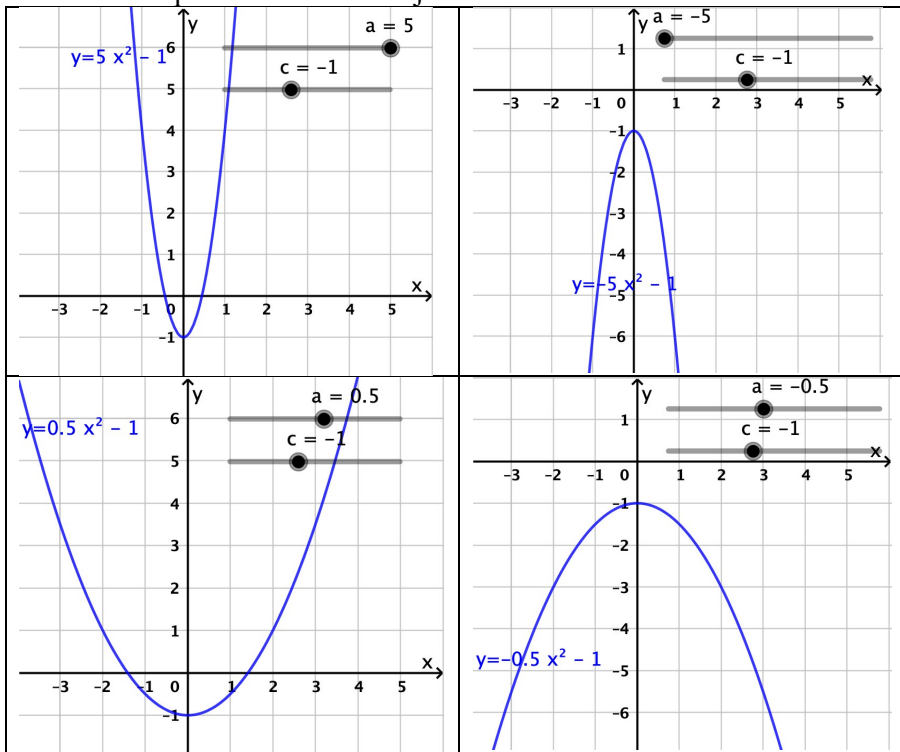
Vastaus

- a) korkeus 5,0 m, leveys 6,3 m
b) mahtuu

7.18

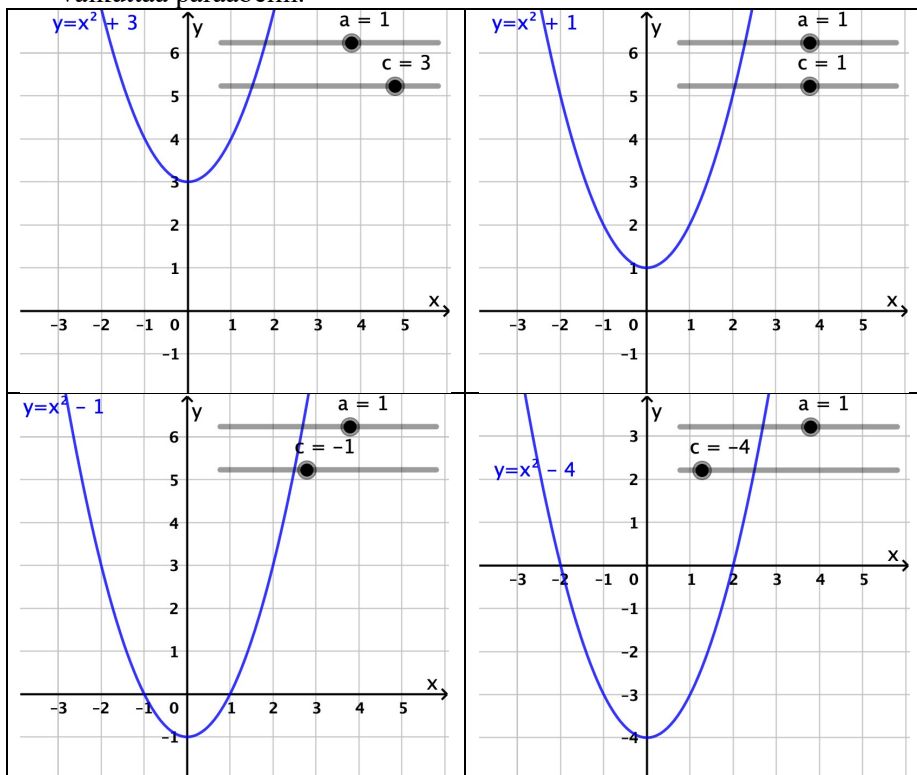
Piirretään funktion f kuvaaja.

- a) Annetaan vakiolle c arvoksi -1 . Tutkitaan, kuinka kertoimen a arvo vaikuttaa paraabelin muotoon ja aukeamissuuntaan.



Kun a on positiivinen, paraabeli aukeaa ylöspäin. Kun a on negatiivinen, paraabeli aukeaa alaspäin. Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi positiivinen luku a on tai mitä pienempi negatiivinen luku a on.

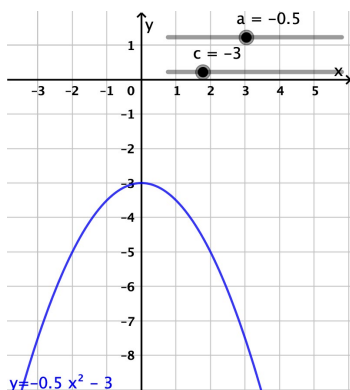
b) Annetaan kertoimelle a arvoksi 1. Tutkitaan, kuinka vakion c arvo vaikuttaa paraabelin.



Vakio c kertoo, missä kohdassa paraabeli leikkaa y -akselin. Kun vakio c kasvaa, paraabeli liikkuu ylöspäin ja kun vakio c pienenee, paraabeli liikkuu alaspäin.

c) Etsitään kertoimelle a ja c pyydetyt arvot.

Vakio c kertoo, missä kohdassa paraabeli leikkaa y -akselin, joten $c = -3$. Kokeillaan, millä kertoimen a arvolla paraabeli kulkee pisteen $(2, -5)$ kautta.



$$a = -0,5 \text{ ja } c = -3$$

Vastaus

a) Kun a on positiivinen, paraabeli aukeaa ylöspäin. Kun a on negatiivinen, paraabeli aukeaa alaspäin. Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi positiivinen luku a on tai mitä pienempi negatiivinen luku a on.

b) Vakio c kertoo, missä kohdassa paraabeli leikkaa y -akselin. Kun vakio c kasvaa, paraabeli liikkuu ylöspäin ja kun vakio c pienenee, paraabeli liikkuu alaspäin.

c) $a = -0,5$ ja $c = -3$